

§2 第 1 课时 空间向量的概念及线性运算

【学习目标】

- 1.经历由平面向量推广到空间向量的过程，了解空间向量的概念.
- 2.经历由平面向量的运算及其运算律推广到空间向量的过程.
- 3.掌握空间向量的线性运算.

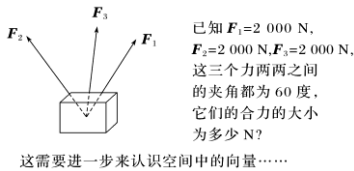
【重点难点】

重点：了解空间向量的概念，经历由平面向量的运算及其运算律推广到空间向量的过程.

难点：掌握空间向量的线性运算.

【导学流程】

一、问题引入



二、探究新知

◇探究一 空间向量的有关概念

【知识梳理】

- (1)在空间中，把具有\_\_\_\_和\_\_\_\_的量叫作空间向量，向量的大小叫作向量的\_\_\_\_或\_\_\_\_.
- 空间向量用有向线段表示，表示向量  $\boldsymbol{a}$  的有向线段的长度也叫作向量  $\boldsymbol{a}$  的长度或模，用  $|\boldsymbol{a}|$  表示，有向线段的方向表示向量的方向.
- (2)几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
相等向量	方向____且模____的向量称为相等向量
自由向量	数学中所研究的向量，与向量的起点无关，称之为____
相反向量	方向相反且模相等的向量互为相反向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量用 $-\boldsymbol{a}$ 表示
零向量	规定模为 $0$ 的向量叫作____，记为 $\boldsymbol{0}$
共线向量	表示向量的两条有向线段所在的直线____时，称这两个向量互为共线向量或平行向量. 规定：零向量与任意向量____
共面向量	平行于____的向量，叫作共面向量

注意点：

- (1)平面向量是一种特殊的空间向量.
- (2)两个向量相等的充要条件为长度相等，方向相同.

- (3)向量不能比较大小.
- (4)共线向量不一定具备传递性, 比如  $\mathbf{0}$ .
- (5)空间中任意两个向量都是共面向量.

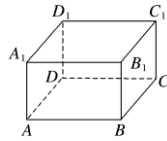
例 1 (1)下列关于空间向量的说法中正确的是( )

- A. 单位向量都相等
- B. 若  $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的长度相等而方向相同或相反
- C. 若向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  满足  $|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$ , 则  $\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$
- D. 相等向量其方向必相同

(2)(多选)下列命题为真命题的是( )

- A. 若空间向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a}=\mathbf{b}$
- B. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 必有  $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$
- C. 若空间向量  $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$  满足  $\mathbf{m}=\mathbf{n}, \mathbf{n}=\mathbf{p}$ , 则  $\mathbf{m}=\mathbf{p}$
- D. 空间中,  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$

跟踪训练 1 如图所示, 以长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的八个顶点的两点为起点和终点的向量中,



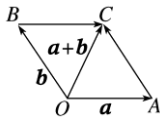
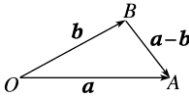
- (1)试写出与  $\overrightarrow{AB}$  相等的所有向量;
- (2)试写出  $\overrightarrow{AA_1}$  的相反向量;
- (3)若  $|AB|=|AD|=2, |AA_1|=1$ , 求向量  $\overrightarrow{AC_1}$  的模.

◇探究二 空间向量的加减运算

问题 1 空间中的任意两个向量是否共面? 为什么?

【知识梳理】

加法运算	三角形法则	语言	首尾顺次相接, 首指向尾为和
		图形	
	平行四边形法则	语言	共起点的两边为邻边作平行四边形, 共起点_____为和

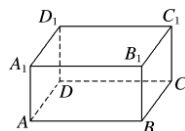
		图形	
减法运算	三角形法则	语言	共起点，连终点，方向指向_____
		图形	
加法运算律	交换律	$a+b=$ _____	
	结合律	$(a+b)+c=$ _____	

注意点：

(1)求向量和时，可以首尾相接，也可共起点；求向量差时，可以共起点.

(2)三角形法则、平行四边形法则在空间向量中也适用.

例 2 (1)(多选)如图，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，下列各式运算结果为  $\vec{BD_1}$  的是( )



A.  $\vec{A_1D_1}-\vec{A_1A}-\vec{AB}$

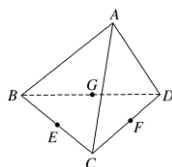
B.  $\vec{BC}+\vec{BB_1}-\vec{D_1C_1}$

C.  $\vec{AD}-\vec{AB}-\vec{DD_1}$

D.  $\vec{B_1D_1}-\vec{A_1A}+\vec{DD_1}$

(2)化简  $(\vec{AB}-\vec{CD})-(\vec{AC}-\vec{BD})=$ \_\_\_\_\_.

跟踪训练 2 如图，已知空间四边形  $ABCD$ ，连接  $AC$ ， $BD$ ， $E$ ， $F$ ， $G$  分别是  $BC$ ， $CD$ ， $DB$  的中点，请化简以下式子，并在图中标出化简结果.



(1)  $\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{DC}$ ;

(2)  $\vec{AB}-\vec{DG}-\vec{CE}$ .

### ◇探究三 空间向量的数乘运算

问题 2 在平面向量中的数乘运算的方向和大小是如何定义的？

#### 【知识梳理】

定义	与平面向量类似，实数 $\lambda$ 与空间向量 $a$ 的乘积仍然是一个向量，记作 $\lambda a$ .
----	--

	求实数与空间向量的乘积的运算称为空间向量的数乘运算		
几何意义	$\lambda > 0$	向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向_____	$\lambda \boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的__倍
	$\lambda < 0$	向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向_____	
	$\lambda = 0$	$\lambda \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ，其方向是_____的	
运算律	结合律	$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \underline{\hspace{2cm}}$	
	分配律	$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$ ， $\mu \in \mathbf{R}$ .	

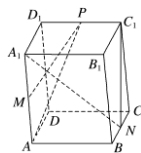
注意点：

(1) 当  $\lambda = 0$  或  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  时,  $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

(2)  $\lambda$  的正负影响着向量  $\lambda \mathbf{a}$  的方向,  $\lambda$  的绝对值的大小影响着  $\lambda \mathbf{a}$  的长度.

(3) 向量  $\lambda \mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{a}$  一定是共线向量.

例3 如图所示, 在平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 设  $\vec{AA_1} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{AB} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{c}$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  分别是  $AA_1$ ,  $BC$ ,  $C_1D_1$  的中点, 试用  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  表示以下各向量:



(1)  $\vec{AP}$ ; (2)  $\vec{A_1N}$ ; (3)  $\vec{MP}$ .

延伸探究

1. 例3的条件不变, 试用  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  表示向量  $\vec{PN}$ .

2. 若把例3中“ $P$ 是  $C_1D_1$ 的中点”改为“ $P$ 在线段  $C_1D_1$ 上, 且  $\frac{C_1P}{PD_1} = \frac{1}{2}$ ”, 其他条件不变,

如何表示  $\vec{AP}$ ?

跟踪训练3 已知四边形  $ABCD$  为正方形,  $P$  是四边形  $ABCD$  所在平面外一点,  $P$  在平面  $ABCD$  上的投影恰好是正方形的中心  $O$ ,  $Q$  是  $CD$  的中点, 求下列各题中  $x$ ,  $y$  的值.

(1)  $\vec{OQ} = \vec{PQ} + x\vec{PC} + y\vec{PA}$ ;

(2)  $\vec{PA} = x\vec{PO} + y\vec{PQ} + \vec{PD}$ .

三、随堂演练

1. (多选)下列命题中, 真命题是( )

- A. 同平面向量一样, 任意两个空间向量都不能比较大小
- B. 两个相等的向量, 若起点相同, 则终点也相同
- C. 只有零向量的模等于 0
- D. 共线的单位向量都相等

2. 化简  $\vec{PM} - \vec{PN} + \vec{MN}$  所得的结果是( )

- A.  $\vec{PM}$       B.  $\vec{NP}$       C.  $\mathbf{0}$       D.  $\vec{MN}$

3. 设有四边形  $ABCD$ ,  $O$  为空间任意一点, 且  $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{DO} + \vec{OC}$ , 则四边形  $ABCD$  是( )

- A. 平行四边形
- B. 空间四边形
- C. 等腰梯形
- D. 矩形

4. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 已知下列各式: ①  $(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CC}_1$ ; ②  $(\vec{AA}_1 + \vec{A_1D_1}) + \vec{D_1C_1}$ ;

③  $(\vec{AB} + \vec{BB_1}) + \vec{B_1C_1}$ ; ④  $(\vec{AA_1} + \vec{A_1B_1}) + \vec{B_1C_1}$ . 其中运算结果为  $\vec{AC_1}$  的有 \_\_\_\_\_ 个.

$$\text{① } (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CC_1} = \vec{AC} + \vec{CC_1} = \vec{AC_1}; \quad \text{② } (\vec{AA_1} + \vec{A_1D_1}) + \vec{D_1C_1} = \vec{AD_1} + \vec{D_1C_1} = \vec{AC_1};$$

$$\text{③ } (\vec{AB} + \vec{BB_1}) + \vec{B_1C_1} = \vec{AB_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{AC_1}; \quad \text{④ } (\vec{AA_1} + \vec{A_1B_1}) + \vec{B_1C_1} = \vec{AB_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{AC_1}.$$

#### 四、课堂小结

1. 知识清单:

(1)向量的相关概念.

(2)向量的线性运算(加法、减法和数乘).

(3)向量的线性运算的运算律.

2. 方法归纳: 类比、三角形法则、平行四边形法则、数形结合思想.

3. 常见误区: 应抓住向量的“大小”和“方向”两个要素, 并注意它是一个“量”, 而不是一个数.

#### 五、布置作业 (课时对点练)

##### 基础巩固

1. 下列说法中正确的是( )

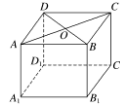
- A. 空间中共线的向量必在同一条直线上
- B.  $\vec{AB} = \vec{CD}$  的充要条件是  $A$  与  $C$  重合,  $B$  与  $D$  重合
- C. 数乘运算中,  $\lambda$  既决定大小, 又决定方向

D. 在四边形  $ABCD$  中, 一定有  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

2. 向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  互为相反向量, 已知  $|\mathbf{b}|=3$ , 则下列结论正确的是( )

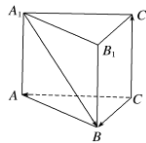
- A.  $\mathbf{a}=\mathbf{b}$  B.  $\mathbf{a}+\mathbf{b}$  为实数 0  
C.  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  方向相同 D.  $|\mathbf{a}|=3$

3. 如图, 在四棱柱的上底面  $ABCD$  中,  $\vec{AB}=\vec{DC}$ , 则下列向量相等的是( )



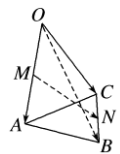
- A.  $\vec{AD}$  与  $\vec{CB}$  B.  $\vec{OA}$  与  $\vec{OC}$  C.  $\vec{AC}$  与  $\vec{DB}$  D.  $\vec{DO}$  与  $\vec{OB}$

4. 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 若  $\vec{CA}=\mathbf{a}$ ,  $\vec{CB}=\mathbf{b}$ ,  $\vec{CC_1}=\mathbf{c}$ , 则  $\vec{A_1B}$  等于( )



- A.  $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$  B.  $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$  C.  $\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}$  D.  $\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}$

5. 如图, 在空间四边形  $OABC$  中,  $\vec{OA}=\mathbf{a}$ ,  $\vec{OB}=\mathbf{b}$ ,  $\vec{OC}=\mathbf{c}$ , 点  $M$ ,  $N$  分别为  $OA$ ,  $BC$  的中点, 则  $\vec{MN}$  等于( )



- A.  $\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$  B.  $-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$  C.  $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}-\frac{2}{3}\mathbf{c}$  D.  $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{c}$

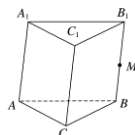
6. (多选) 已知平行六面体  $ABCD-A'B'C'D'$ , 则下列四式中正确的有( )

- A.  $\vec{AB}-\vec{CB}=\vec{AC}$  B.  $\vec{AC'}=\vec{AB}+\vec{B'C'}+\vec{CC'}$   
C.  $\vec{AA'}=\vec{CC'}$  D.  $\vec{AB}+\vec{BB'}+\vec{BC}+\vec{C'C}=\vec{AC'}$

7. 化简  $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-3\mathbf{c})+5(\frac{2}{3}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{2}{3}\mathbf{c})-3(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})=$ \_\_\_\_\_.

8. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $M$  是  $AA_1$  的中点, 已知  $\vec{AB}=\mathbf{a}$ ,  $\vec{AD}=\mathbf{b}$ ,  $\vec{AA_1}=\mathbf{c}$ , 用  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  表示  $\vec{CM}$ , 则  $\vec{CM}=$ \_\_\_\_\_.

9. 如图所示, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $M$  是  $BB_1$  的中点. 化简下列各式, 并在图中标出化简得到的向量.

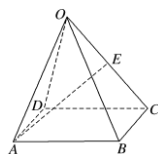


(1)  $\vec{CB} + \vec{BA}_1$ ;

(2)  $\vec{AC} + \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AA}_1$ ;

(3)  $\vec{AA}_1 - \vec{AC} - \vec{CB}$ .

10. 如图, 设  $O$  为  $\square ABCD$  所在平面外任意一点,  $E$  为  $OC$  的中点, 若  $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{OD} + x\vec{OB} + y\vec{OA}$ , 求  $x, y$  的值.

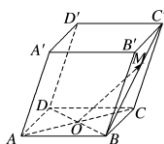


### 综合运用

11. 已知空间中任意四个点  $A, B, C, D$ , 则  $\vec{DA} + \vec{CD} - \vec{CB}$  等于( )

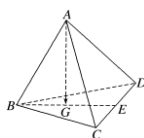
- A.  $\vec{DB}$       B.  $\vec{AB}$       C.  $\vec{AC}$       D.  $\vec{BA}$

12. 如图, 在平行六面体  $ABCD-A'B'C'D'$  中,  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ , 点  $M$  在  $BC'$  上, 且  $|BM| = 2|MC'|$ , 则  $\vec{OM}$  等于( )

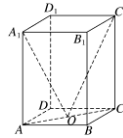


- A.  $-\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{7}{6}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AA'}$       B.  $-\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AA'}$   
C.  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AA'}$       D.  $\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AA'}$

13. 如图, 在四面体  $ABCD$  中,  $E, G$  分别是  $CD, BE$  的中点, 若记  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{AC} = \mathbf{c}$ , 则  $\vec{AG} =$  \_\_\_\_\_.



14. 如图, 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  为  $AC$  的中点.



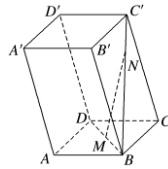
(1) 化简  $\vec{A_1O} - \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} =$  \_\_\_\_\_.

(2) 用  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AA_1}$  表示  $\vec{OC_1}$ , 则  $\vec{OC_1} =$  \_\_\_\_\_.

### 拓广探究

15. 在平行六面体  $ABCD-A'B'C'D'$  中, 若  $\vec{AC'} = x\vec{AB} + \frac{y}{2}\vec{BC} + \frac{z}{3}\vec{CC'}$ , 则  $x+y+z =$  \_\_\_\_\_.

16. 如图, 已知  $ABCD-A'B'C'D'$  是平行六面体.



(1) 化简  $\frac{1}{2}\vec{AA'} + \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$ , 并在图中标出其结果;

(2) 设  $M$  是底面  $ABCD$  的中心,  $N$  是侧面  $BCC'B'$  对角线  $BC'$  上的  $\frac{3}{4}$  分点, 设  $\vec{MN} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AD} + \gamma\vec{AA'}$ , 试求  $\alpha, \beta, \gamma$  的值.